Selbsteinschätzungstest Mathematik

An der ETH Zürich durchlaufen Sie in fast allen Studienrichtungen eine anspruchsvolle Mathematikausbildung. Diese ist die Basis für die weiteren fachspezifischen Veranstaltungen und baut auf dem Maturitätsstoff auf.

Der vorliegende Selbsteinschätzungstest Mathematik umfasst den gesamten Stoff des Grundlagenfachs Mathematik bis zum Ende des Gymnasiums und kann Ihnen helfen, Ihren aktuellen Ausbildungs- und Leistungsstand in Mathematik zu beurteilen und allfällige Lücken aufzudecken. Diese können Sie dann gezielt bearbeiten und schliessen.

Wir möchten darauf hinweisen, dass die Fähigkeiten in Mathematik nur *ein* Erfolgsfaktor für ein Studium an der ETH Zürich sind. Ebenso wichtig sind z.B. Ausdauer, Motivation und Arbeitstechnik. Aus einem guten Testergebnis können Sie daher nicht automatisch einen Erfolg im Studium ableiten. Umgekehrt sollen Sie sich von einer unterdurchschnittlichen Punktezahl auch nicht entmutigen lassen. Nehmen Sie dies zum Anlass, Ihre Mathematikkenntnisse aufzufrischen und zu ergänzen!

Falls Sie in der Studienwahl unsicher sind und nicht wissen, wie Sie Ihre Testresultate einordnen sollen, können Sie uns gerne kontaktieren: www.ethz.ch/studienwahlberatung

Der folgende vom Departement Mathematik zusammengestellte Test umfasst

I. Multiple-Choice-Fragen
II. Lösungen und Erklärungen
III. Literaturempfehlungen zur Bearbeitung allfälliger Lücken

I. Die Multiple-Choice-Fragen

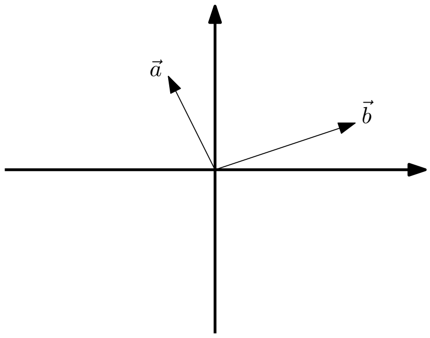
Bei jeder Fragen ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Verwenden Sie als Hilfsmittel nur Papier und Stift.

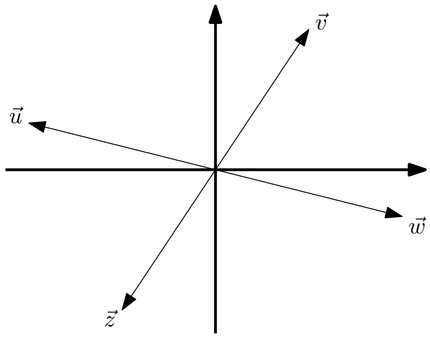
Planen Sie eine Bearbeitungszeit von 80 bis 90 Minuten ein.

Bearbeiten Sie zuerst alle Fragen, bevor Sie Ihre Antwort mit Hilfe des Lösungsteils überprüfen.

Frage 1

Gegeben seien folgende Vektoren





Welcher der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ und $\vec{z}$ stellt den Vektor $\vec{b} - \vec{a}$ dar?

- ◯ $\vec{u}$
- ◯ $\vec{v}$
- ◯ $\vec{w}$
- ◯ $\vec{z}$

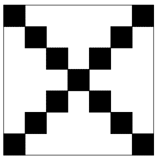
Frage 2

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{a}| =$

- ◯ 1.
- ◯ 2.
- ◯ 3.
- ◯ 9.
- ◯ Keines davon.

Frage 3

In einem Quadrat der Seitenlänge 2013 sind 1×1-Quadrate entlang der beiden Diagonalen schwarz gefärbt, die Restfläche ist weiss.
Beispiel: Für ein Quadrat mit Seitenlänge 7 sieht es so aus:

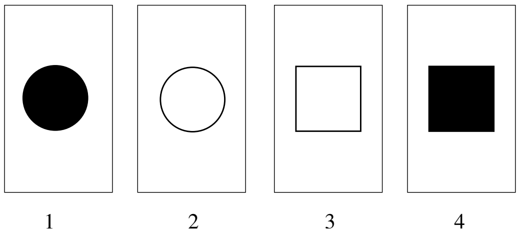


Bestimmen Sie den Flächeninhalt der weissen Fläche des 2013×2013-Quadrats.

- ◯ $2009 \cdot 2010$
- ◯ $2010 \cdot 2010$
- ◯ $2011 \cdot 2012$
- ◯ $2011 \cdot 2011$
- ◯ $2012 \cdot 2012$

Frage 4

Karl hat auf jede der vier abgebildeten Karten eine Kreisscheibe auf einer Seite und ein Quadrat auf der anderen Seite gezeichnet.



Karl stellt folgende Behauptung auf:

Ist die Kreisscheibe schwarz, dann ist auch das Quadrat auf der Karte schwarz.

Um mich von seiner Behauptung zu überzeugen, muss ich nicht alle Karten umdrehen. Es genügt

- ◯ die Karte 1 umzudrehen.
- ◯ die Karte 3 umzudrehen.
- ◯ die Karten 1 und 2 umzudrehen.
- ◯ die Karten 3 und 4 umzudrehen.
- ◯ die Karten 1 und 3 umzudrehen.
- ◯ die Karten 1, 3 und 4 umzudrehen.

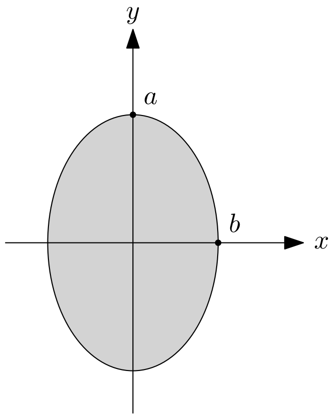
Frage 5

Die Schnittmenge eines Würfels mit einer Ebene sei ein Vieleck. Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Ecken dieses Vielecks.

- ◯ 3
- ◯ 4
- ◯ 6
- ◯ 8
- ◯ Keine der anderen Antworten ist korrekt.

Frage 6

Gegeben sei eine Ellipse



Rotiert diese um die x-Achse, erhalten wir ein Ellipsoid E_x, rotiert die Ellipse um die y-Achse, erhalten wir ein Ellipsoid E_y.

Angenommen, es sei $a > b$. Welche der folgenden Aussagen ist dann korrekt?

- ◯ $E_x = E_y$
- ◯ $E_x \neq E_y$, mit $\mathrm{Vol}(E_x) = \mathrm{Vol}(E_y)$
- ◯ $E_x \neq E_y$, mit $\mathrm{Vol}(E_x) > \mathrm{Vol}(E_y)$
- ◯ $E_x \neq E_y$, mit $\mathrm{Vol}(E_x) < \mathrm{Vol}(E_y)$

Frage 7

Welche der folgenden Rechenregeln stimmt für alle positiven reellen Zahlen a und b?

- ◯ $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- ◯ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ◯ $(a+b)(c+d) = ac + bd$
- ◯ $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$
- ◯ Keine.

Frage 8

Welche reellen Zahlen x erfüllen die Ungleichung $|x-2| \leq 3$?

- ○ Die Ungleichung ist niemals erfüllt.
- ○ $x \leq 5$
- ○ $x \in [-3, 3]$
- ○ $x \geq -1$
- ○ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 9

Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ist ...

- ○ leer.
- ○ $\{-1, 1\}$.
- ○ $\{-2, -1, 1, 2\}$.
- ○ $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.
- ○ Keine der Aussagen stimmt.

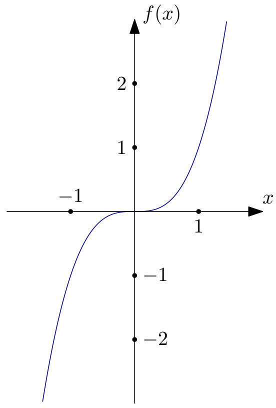
Frage 10

Welcher der folgenden Ausdrücke ist für $a, b > 0$ gleich $\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2})$?

- ○ $6\ln(a)$
- ○ $2\ln(a) - 4\ln(b)$
- ○ $\frac{\ln(a^2b)}{\ln(ab^{-1})}$
- ○ $\ln(a^2b^4)$
- ○ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 11

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$.
Durch Verschieben um 2 Einheiten nach rechts erhalten wir den Graphen einer neuen Funktion g. Wie lautet die Funktionsgleichung von g?



◯ $g(x) = (x-2)^3$

◯ $g(x) = (x+2)^3$

◯ $g(x) = x^3 - 2$

◯ $g(x) = x^3 + 2$

◯ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 12

Bestimmen Sie $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

◯ 0

◯ $\frac{1}{2}$

◯ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

◯ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

◯ 1

◯ Das geht nur mit einem Taschenrechner.

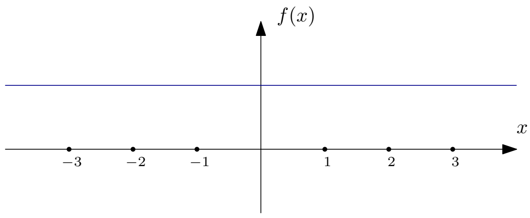
Frage 13

Für welches n ist $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$?

- ◯ $n = 2$
- ◯ $n = 3$
- ◯ $n = 4$
- ◯ $n = 5$
- ◯ Das geht nur mit einem Taschenrechner.

Frage 14

Welche Funktion $x \mapsto f(x)$ passt zum folgenden Graphen?



- ◯ $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$
- ◯ $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$
- ◯ $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- ◯ $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
- ◯ $x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$

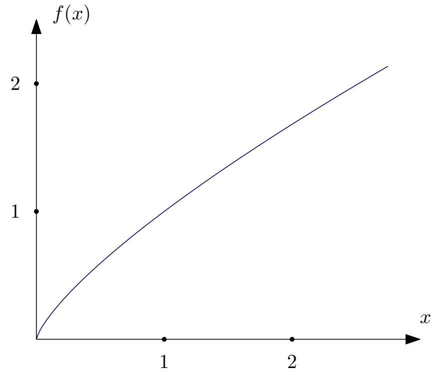
Frage 15

Welche Periode hat die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$?

- ◯ Es liegt keine Periode vor.
- ◯ $\frac{\pi}{2}$
- ◯ 2
- ◯ π
- ◯ π^2

Frage 16

Welche Funktion $x \mapsto f(x)$ passt zur folgenden Kurve?



- ◯ $x \mapsto x^3$
- ◯ $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$
- ◯ $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$
- ◯ $x \mapsto x^{-\frac{4}{3}}$
- ◯ $x \mapsto x^{-3}$

Frage 17

Gegeben sei die Ebene E mit $E : x + 2y - z = 4$. Welche der folgenden Ebenen ist parallel zu E aber nicht identisch?

- ◯ $F : 2x + 4y - 2z = 8$
- ◯ $G : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 - s \\ z = 2 + t \end{cases}$
- ◯ $H : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 + s \\ z = 2 + t \end{cases}$
- ◯ $L : \begin{cases} x = 2 + 4s - t \\ y = -2s \\ z = -t \end{cases}$

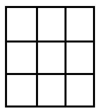
Frage 18

Welchen geometrischen Ort beschreibt die Gleichung $x^2 + 6x + y^2 - 7 = 0$?

- ◯ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius $r = 4$
- ◯ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 4$
- ◯ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 16$
- ◯ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius $r = \sqrt{7}$
- ◯ Eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel bei $(-3, 16)$

Frage 19

Sara malt die 9 Felder einer Zeichnung mit Farbstiften an. Sie besitzt Stifte in 12 unterschiedlichen Farben. Sara malt genau 3 Felder gelb an und die weiteren Felder jeweils mit einer beliebigen der anderen Farben.



Wie viele Möglichkeiten hat sie dafür?

- ◯ $\binom{9}{3}$
- ◯ 11^6
- ◯ $\binom{9}{3} \cdot 11^6$
- ◯ $9!$
- ◯ $12^9 - 3$

Frage 20

Eine Urne enthält rote und weisse Kugeln, insgesamt befinden sich 40 Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Herausgreifen von 2 Kugeln 2 weisse zu ziehen, ist $\frac{9}{20}$.

Wie viele weisse Kugeln befinden sich in der Urne?

- ◯ Das lässt sich nicht entscheiden.
- ◯ 13
- ◯ 18
- ◯ 26
- ◯ 27

Frage 21

Eva und Adam werfen Münzen: Eva bezahlt Adam einen Einsatz von x Franken, dann werden zwei Münzen geworfen. Es gelten folgende Regeln:

- Kommt zweimal Kopf, erhält Eva nichts.
- Kommt zweimal Zahl, erhält Eva ihren Einsatz zurück.
- Zeigt eine Münze Kopf, die andere Zahl, erhält Eva ihren Einsatz plus einen Franken zurück.

Bei welchem Einsatz x ist das Spiel fair, das heisst, weder Adam noch Eva verdienen auf lange Sicht?

- ◯ Das Spiel ist nie fair.
- ◯ $x = 1$
- ◯ $x = 2$
- ◯ $x = 3$
- ◯ Bei jedem Einsatz x.
- ◯ Das lässt sich nicht entscheiden.

Frage 22

Wir nehmen an, dass ein neugeborenes Baby mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Knabe (K) und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Mädchen (M) ist. Welche Folge der Geschlechter bei sechs aufeinanderfolgenden Geburten ist am wahrscheinlichsten?

- ◯ $KKMMMK$
- ◯ $KKKMMM$
- ◯ $KKKKKK$
- ◯ $KMKMKM$
- ◯ Alle sind gleich wahrscheinlich.

Frage 23

Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$$

ist gleich ...

- ◯ $-\frac{1}{21}$.
- ◯ 0.
- ◯ $\frac{1}{32}$.
- ◯ $\frac{1}{5}$.
- ◯ ∞.

Frage 24

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ \ldots$$

ist gleich ...

- ◯ $\frac{5}{8}$.
- ◯ $\frac{2}{3}$.
- ◯ $\frac{11}{16}$.
- ◯ $\frac{3}{2}$.
- ◯ ∞.

Frage 25

Der Grenzwert

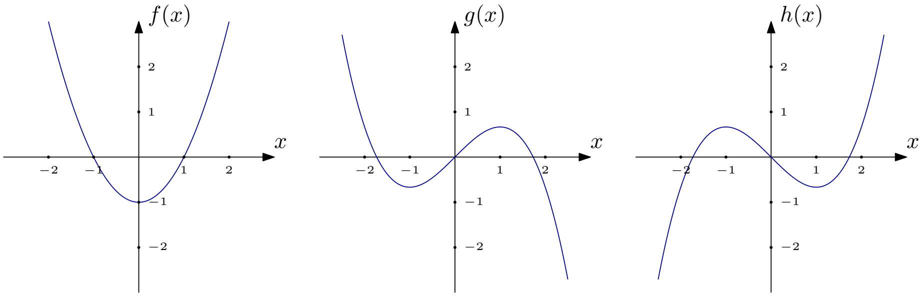
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

ist gleich ...

- ◯ 0.
- ◯ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- ◯ $\frac{1}{2}$.
- ◯ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ◯ ∞.

Frage 26

Das folgende Bild zeigt die Graphen dreier Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist. Welche Aussage ist richtig?



- ◯ $f' = g$
- ◯ $f' = h$
- ◯ $g' = f$
- ◯ $g' = h$
- ◯ $h' = f$
- ◯ $h' = g$

Frage 27

Sei f die Funktion mit $f(x) = e^{2x}$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung f'?

- ◯ $f'(x) = 2xe^{2x-1}$
- ◯ $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
- ◯ $f'(x) = 2e^{2x}$
- ◯ $f'(x) = e^{2x}$
- ◯ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 28

Sei $f(x) = \ln(\sin x)$ mit $x \in]0, \pi[$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- ◯ $f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- ◯ $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- ◯ $f'(x) = \ln(\cos(x))$
- ◯ $f'(x) = \frac{1}{x}\sin(x) + \ln(\cos x)$
- ◯ $f'(x) = \cos(x)\ln(\sin x)$

Frage 29

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -\cos(3x)$. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f in $\frac{\pi}{2}$.

- ◯ -3
- ◯ 1
- ◯ $3\sin(3)$
- ◯ 3
- ◯ Die Tangente existiert nicht.

Frage 30

Wir definieren zwei neue Funktionen Sinushyperbolicus $\sinh x$ und Kosinushyperbolicus $\cosh x$ wie folgt:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Die Ableitung von Kosinushyperbolicus, $\frac{d}{dx} \cosh x$, ist ...

- ◯ $\sinh x$.
- ◯ $\cosh x$.
- ◯ $-\sinh x$.
- ◯ $-\cosh x$.

Frage 31

Welche der folgenden Gleichungen ist für reellen Zahlen x richtig?

- ◯ $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$
- ◯ $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$
- ◯ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- ◯ $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 0$

Frage 32

Das Integral $\displaystyle\int_0^2 3x^2\, dx$ ist gleich ...

- ◯ $\frac{4}{3}$.
- ◯ 2.
- ◯ $\frac{8}{3}$.
- ◯ 4.
- ◯ 8.

Frage 33

Das Integral $\int_0^1 e^{-2t}\,dt$ ist gleich ...

- ◯ $1 - \frac{1}{e^2}$.
- ◯ $\frac{1}{2e^2}$.
- ◯ $\frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}$.
- ◯ $1 - \frac{1}{2e^2}$.
- ◯ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$

Frage 34

Das Integral $\int_{-1}^1 |t|\,dt$ ist gleich ...

- ◯ 0.
- ◯ 1.
- ◯ 2.
- ◯ 4.
- ◯ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 35

Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)\,dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

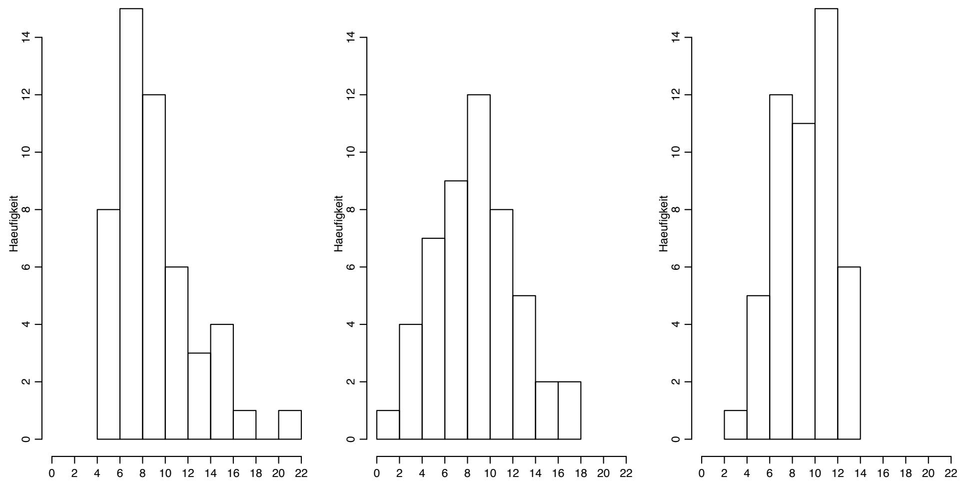
- ◯ $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$
- ◯ $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$
- ◯ $f'(x) = \cos(x)$
- ◯ $f'(x) = \sin(x)$
- ◯ Keine der Gleichungen ist korrekt.

Frage 36

Für drei Datensätze wurden der Mittelwert, der Median und die Standardabweichung berechnet. Es ergaben sich die folgenden Werte

	Datensatz 1	Datensatz 2	Datensatz 3
Mittelwert	8.77	9.05	9.13
Median	8.76	8.18	9.23
Standardabweichung	3.80	3.44	2.56

Ferner sind die Histogramme der 3 Datensätze gegeben.



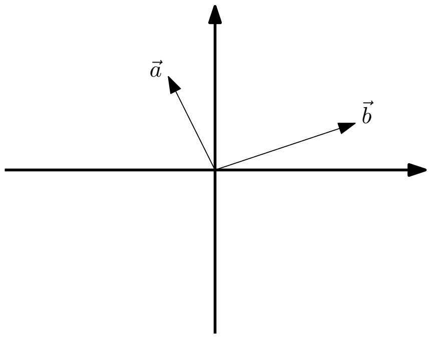
Welches ist die richtige Zuordnung der 3 Histogramme links, Mitte und rechts zu den Datensätzen ?

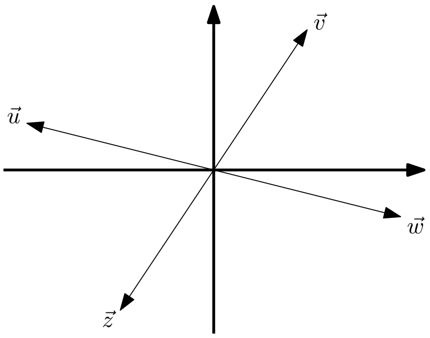
- ◯ 1 – links, 2 – Mitte, 3 – rechts
- ◯ 1 – links, 3 – Mitte, 2 – rechts
- ◯ 2 – links, 1 – Mitte, 3 – rechts
- ◯ 3 – links, 2 – Mitte, 1 – rechts
- ◯ 2 – links, 3 – Mitte, 1 – rechts
- ◯ 3 – links, 1 – Mitte, 2 – rechts

II. Lösungen und Erklärungen

Frage 1

Gegeben seien folgende Vektoren

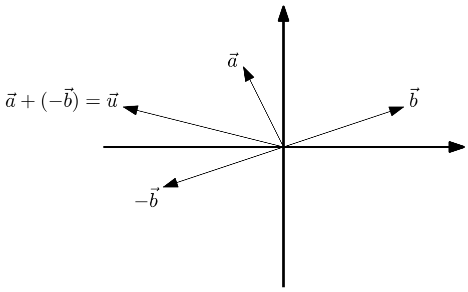




Welcher der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ und $\vec{z}$ stellt den Vektor $\vec{b} - \vec{a}$ dar?

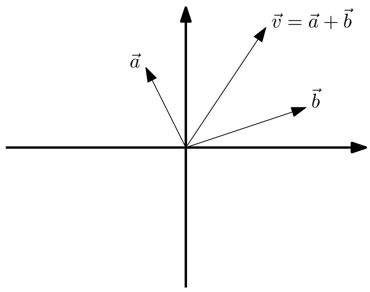
○ $\vec{u}$

Nein, dieser Vektor stellt den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ dar. Es ist $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ und damit



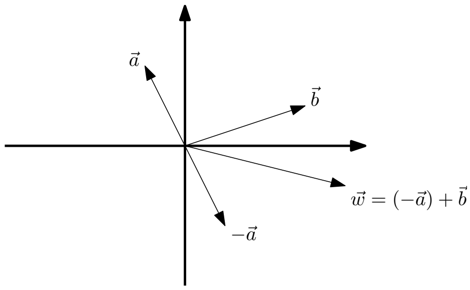
○ $\vec{v}$

Nein, dies ist die Summe der beiden Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$:



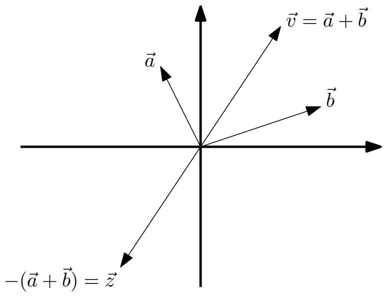
$\surd$ ◯ $\vec{w}$

Richtig. Es ist $\vec{b} - \vec{a} = (-\vec{a}) + \vec{b}$ und damit



◯ $\vec{z}$

Nein, dies stellt den Vektor $-(\vec{a} + \vec{b})$ dar:



Frage 2

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{a}| =$

- ◯ 1.
- ◯ 2.
- √ ◯ 3.
- ◯ 9.
- ◯ Keines davon.

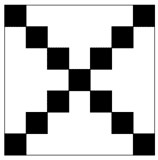
Der Betrag eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ berechnet sich durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In unserem Fall rechnen wir nach, dass $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ gilt.

Frage 3

In einem Quadrat der Seitenlänge 2013 sind 1×1-Quadrate entlang der beiden Diagonalen schwarz gefärbt, die Restfläche ist weiss.
Beispiel: Für ein Quadrat mit Seitenlänge 7 sieht es so aus:



Bestimmen Sie den Flächeninhalt der weissen Fläche des 2013×2013-Quadrats.

○ $2009 \cdot 2010$

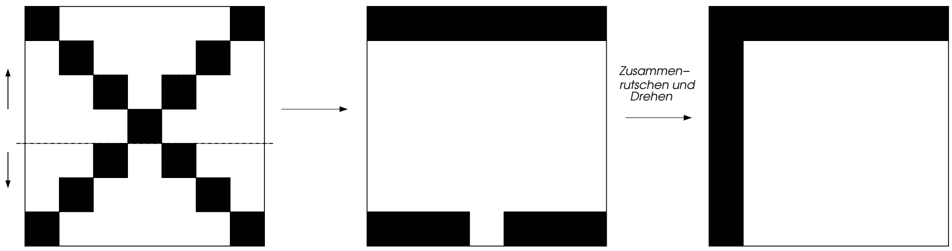
○ $2010 \cdot 2010$

○ $2011 \cdot 2012$

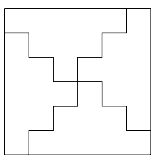
○ $2011 \cdot 2011$

√ ○ $2012 \cdot 2012$

Folgende drei Bilder zeigen die Grundidee einer Überlegung, dass die weisse Fläche ein 2012×2012-Quadrat ist:



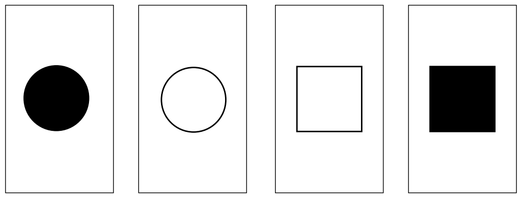
Im ersten Bild schieben wir alle kleinen schwarzen Quadrat in der oberen Hälfte nach oben, inklusive dem Quadrat in der Mitte. Dann entsteht an der oberen Kante des grossen Quadrats ein schwarzer Balken, wie im 2. Bild. Die übrigen kleinen schwarzen Quadrate schieben wir nach unten. Dann entsteht unten ein Balken, wie im 2. Bild gezeigt. Schieben wir das kleine weisse Quadrat nach rechts und drehen die schwarzen Balken entgegen dem Uhrzeigersinn an die linke Kante, entsteht das 3. Bild.
Alternativ können wir aus dem 2013×2013-Quadrat die kleinen schwarzen Quadrate entfernen und dieses wie folgt zusammenschieben



Wieder erhalten wieder ein 2012×2012-Quadrat.

Frage 4

Karl hat auf jede der vier abgebildeten Karten eine Kreisscheibe auf einer Seite und ein Quadrat auf der anderen Seite gezeichnet.



1 2 3 4

Karl stellt folgende Behauptung auf:

Ist die Kreisscheibe schwarz, dann ist auch das Quadrat auf der Karte schwarz.

Um mich von seiner Behauptung zu überzeugen, muss ich nicht alle Karten umdrehen. Es genügt

- ○ die Karte 1 umzudrehen.

  Falsch: Die Karte 3 muss ebenfalls umgedreht werden, denn falls auf der Rückseite ein schwarzer Kreis zum Vorschein käme, wäre Karls Behauptung widerlegt.

- ○ die Karte 3 umzudrehen.

  Falsch: Die Karte 1 muss auch umgedreht werden, denn wenn das Quadrat auf deren Rückseite weiss wäre, hätte man Karls Behauptung widerlegt.

- ○ die Karten 1 und 2 umzudrehen.

  Falsch: Die Karte 2 umzudrehen nützt nichts, denn unabhängig davon, ob das Quadrat auf der Rückseite weiss oder schwarz ist wird Karls Behauptung weder widerlegt, noch bestätigt.

- ○ die Karten 3 und 4 umzudrehen.

  Falsch: Die Karte 4 muss nicht umgedreht werden. Sowohl ein weisser, wie ein schwarzer Kreis auf deren Rückseite sind mit Karls Behauptung verträglich.

- √ ○ die Karten 1 und 3 umzudrehen.

  Richtig!

- ○ die Karten 1, 3 und 4 umzudrehen.

  Falsch: Die Karte 4 muss nicht umgedreht werden. Sowohl ein weisser, wie ein schwarzer Kreis auf deren Rückseite sind mit Karls Behauptung verträglich.

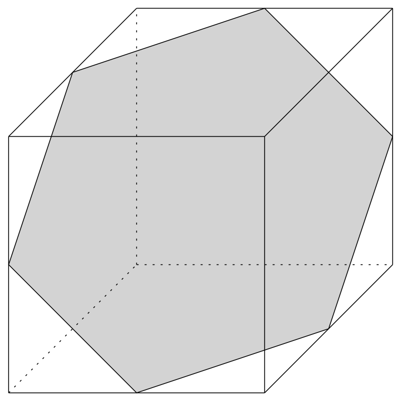
Die Karte 1 muss sicher umgedreht werden, denn wenn das Quadrat auf deren Rückseite weiss wäre, hätte man Karls Behauptung widerlegt.
Die Karte 2 umzudrehen nützt hingegen nichts, denn unabhängig davon, ob das Quadrat auf der Rückseite weiss oder schwarz ist wird Karls Behauptung weder widerlegt, noch bestätigt.
Die Karte 3 muss ebenfalls umgedreht werden, denn falls auf der Rückseite ein schwarzer Kreis zum Vorschein käme, wäre Karls Behauptung widerlegt.
Die Karte 4 hingegen muss nicht umgedreht werden. Sowohl ein weisser, wie ein schwarzer Kreis auf der Rückseite sind mit Karls Behauptung verträglich.

Frage 5

Die Schnittmenge eines Würfels mit einer Ebene sei ein Vieleck. Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Ecken dieses Vielecks.

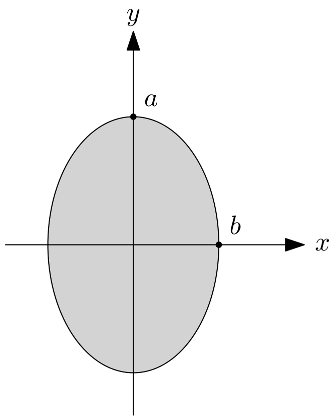
- ◯ 3
- ◯ 4
- √ ◯ 6
- ◯ 8
- ◯ Keine der anderen Antworten ist korrekt.

Da ein Würfel 6 Seitenflächen hat, schneidet eine Ebene höchstens diese 6 Flächen. Um ein 6-Eck anzugeben, wähle zum Beispiel 6 Kantenmittelpunkte des Würfels, wie im Bild unten angegeben, und verbinde diese.



Frage 6

Gegeben sei eine Ellipse



Rotiert diese um die x-Achse, erhalten wir ein Ellipsoid E_x, rotiert die Ellipse um die y-Achse, erhalten wir ein Ellipsoid E_y.

Angenommen, es sei $a > b$. Welche der folgenden Aussagen ist dann korrekt?

- ◯ $E_x = E_y$
- ◯ $E_x \neq E_y$, mit $\mathrm{Vol}(E_x) = \mathrm{Vol}(E_y)$
- √ ◯ $E_x \neq E_y$, mit $\mathrm{Vol}(E_x) > \mathrm{Vol}(E_y)$
- ◯ $E_x \neq E_y$, mit $\mathrm{Vol}(E_x) < \mathrm{Vol}(E_y)$

Stellen Sie sich eine extreme Situation vor, das heisst, wir wählen a sehr gross und b sehr klein. Der Körper E_y hat dann die Form einer *langen dünnen Spaghetti* und E_x die eines *riesigen Pfannkuchens*.
Dabei enthält der Körper E_x den ganzen Körper E_y und damit sehen wir, dass beide Körper nicht gleich sind und E_x ein grösseres Volumen hat, also $\mathrm{Vol}(E_x) > \mathrm{Vol}(E_y)$.

Alternativ lassen sich auch Formeln für $\mathrm{Vol}(E_x)$ und $\mathrm{Vol}(E_y)$ angeben, um auszurechnen, dass unter diesen Umständen $\mathrm{Vol}(E_x) > \mathrm{Vol}(E_y)$ gilt. Diese Formeln lernen Sie sehr wahrscheinlich in einer Analysisvorlesung kennen.

Frage 7

Welche der folgenden Rechenregeln stimmt für alle positiven reellen Zahlen a und b?

○ $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Nein, wähle zum Beispiel $a = 1$ und $b = 2$. Dann ist die linke Seite gleich $\frac{1}{3}$, die rechte gleich $\frac{3}{2}$.

○ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Nein, wähle zum Beispiel $a = 1$ und $b = 4$. Dann ist die linke Seite gleich $\sqrt{5}$, die rechte gleich 3.

○ $(a+b)(c+d) = ac + bd$

Nein. Setze zum Beispiel $a = b = c = d = 1$, dann gilt für die linke Seite:

$$(a+b)(c+d) = (1+1)(1+1) = 2 \cdot 2 = 4,$$

für die rechte Seite aber:

$$ac + bd = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 2.$$

Hingegegen gilt $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

○ $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$

Nein. Wählen Sie zum Beispiel $a = b = 1$. Dann ist die linke Seite $\ln(2)$ und die rechte $\ln(1) + \ln(1) = 0 + 0 = 0 \neq \ln(2)$.

Es gilt aber $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

√ ○ Keine.

Frage 8

Welche reellen Zahlen x erfüllen die Ungleichung $|x - 2| \leq 3$?

○ Die Ungleichung ist niemals erfüllt.

○ $x \leq 5$

○ $x \in [-3, 3]$

○ $x \geq -1$

√ ○ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt:

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 3 &\Leftrightarrow x - 2 \leq 3 \text{ und } -(x-2) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq 5 \text{ und } -1 \leq x \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 5]. \end{aligned}$$

Frage 9

Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ist ...

- ○ leer.
- ○ $\{-1, 1\}$.
- ○ $\{-2, -1, 1, 2\}$.
- √ ○ $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.
- ○ Keine der Aussagen stimmt.

Sei $x^2 = z$, dann ergibt sich die quadratische Gleichung $z^2 - 3z + 2 = 0$, mit Lösungen:

$$z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Setzen wir die Lösungen $z_1 = 1, z_2 = 2$ in die Gleichung $x^2 = z$ ein und lösen jeweils nach x auf, so erhalten wir die Lösungsmenge $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

Cave! Wenn Sie die Lösung durch Einsetzen gefunden haben, wissen Sie zunächst nicht, dass $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$ wirklich die Lösungsmenge ist. Es könnte auch noch weitere Zahlen geben. Mit dem Ansatz oben, können Sie dies ausschliessen.

Frage 10

Welcher der folgenden Ausdrücke ist für $a, b > 0$ gleich $\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2})$?

- ○ $6\ln(a)$
- ○ $2\ln(a) - 4\ln(b)$
- ○ $\frac{\ln(a^2b)}{\ln(ab^{-1})}$
- √ ○ $\ln(a^2b^4)$
- ○ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Verwende die Rechenregeln $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ und $\ln(a^r) = r\ln a$ und erhalte

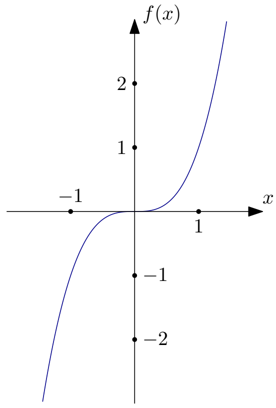
$$\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2}) = 4\ln a + 2\ln b - (2\ln a - 2\ln b) = 2\ln a + 4\ln b = \ln(a^2b^4)$$

oder kürzer

$$\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2}) = \ln\left(\frac{a^4b^2}{a^2b^{-2}}\right) = \ln(a^2b^4).$$

Frage 11

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$.
Durch Verschieben um 2 Einheiten nach rechts erhalten wir den Graphen einer neuen Funktion g. Wie lautet die Funktionsgleichung von g?



√ ○ $g(x) = (x - 2)^3$

○ $g(x) = (x + 2)^3$

○ $g(x) = x^3 - 2$

○ $g(x) = x^3 + 2$

○ Keine der obigen Antworten ist richtig.

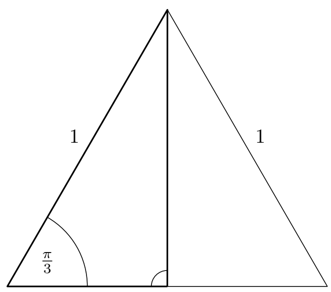
Eine Verschiebung um 2 nach rechts bedeutet, dass die neue Funktion g den Wert $f(x)$ bei $x + 2$ annimmt: $g(x + 2) \overset{!}{=} f(x)$ für alle $x \Leftrightarrow g(x) = f(x - 2)$. Das heisst, in $f(x)$ ist die Variable x durch $x - 2$ zu ersetzen.

Frage 12

Bestimmen Sie $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- ◯ 0
- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- √ ◯ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ◯ 1
- ◯ Das geht nur mit einem Taschenrechner.

Das Bogenmass $\frac{\pi}{3}$ entspricht dem Winkel 60 Grad. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1.



Mit Hilfe einer Höhe erhalten wir ein neues rechtwinkliges Dreieck. In diesem hat die Gegenkathete des Winkels (gleich dieser Höhe) die Länge $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ist der Sinus gleich

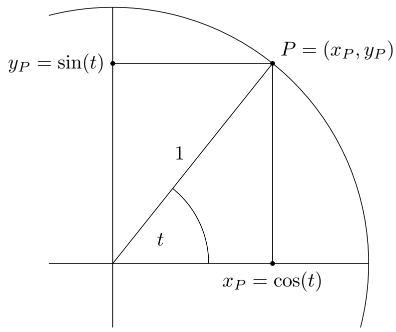
$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Frage 13

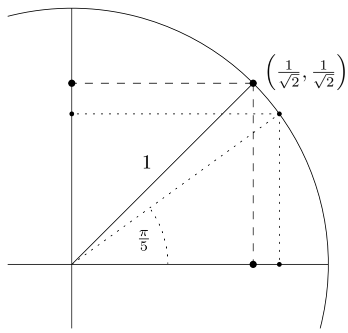
Für welches n ist $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$?

- ◯ $n = 2$
- ◯ $n = 3$
- ◯ $n = 4$
- √ ◯ $n = 5$
- ◯ Das geht nur mit einem Taschenrechner.

Für einen Punkt auf dem Einheitskreis $P = (x_P, y_P)$ ist die x-Koordinate x_P durch den Kosinus gegeben und die y-Koordinate y_P durch den Sinus.

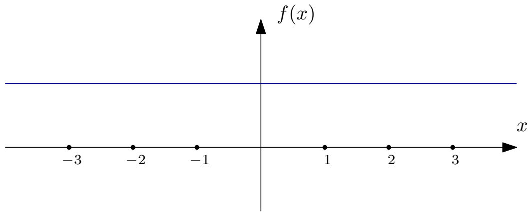


Die Winkelhalbierende $y = x$ schliesst mit der x-Achse den Winkel 45° ein, dieser entspricht dem Bogenmass $\frac{\pi}{4}$. Der Punkt (x_P, y_P) auf dem Einheitskreis zu diesem Winkel hat die Koordinaten $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
Ist der Winkel kleiner als $\frac{\pi}{4}$, so ist die x-Koordinate grösser als die y-Koordinate, $x_P > y_P$. Mit $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$ ist also $\cos\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{5}$.



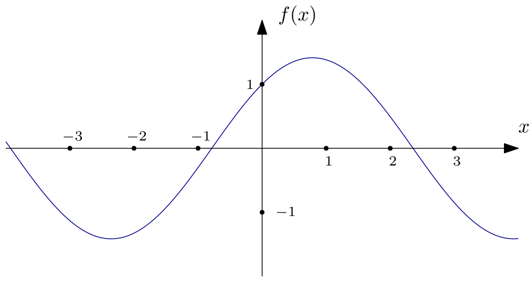
Frage 14

Welche Funktion $x \mapsto f(x)$ passt zum folgenden Graphen?



○ $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$

Nein. Setzen Sie zum Beispiel 0 und π für x ein, um festzustellen, dass die Funktion nicht konstant ist. Der Graph dieser Funktion sieht so aus:



√ ○ $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Richtig. Die Summe $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ ist konstant gleich 1.

○ $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Nein. Setzen Sie zum Beispiel 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x ein, um festzustellen, dass die Funktion nicht konstant ist.
Mit den Additionstheoremen zeigt sich, dass die Funktion gleich $x \mapsto 2\sin(x)$ ist.

○ $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Nein. Mit den Additionstheoremen zeigt sich, dass die Funktion zwar konstant ist, aber gleich 0.

○ $x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$

Nein. Setzen Sie zum Beispiel 0 und $\frac{\pi}{2}$ für x ein, um festzustellen, dass die Funktion nicht konstant ist.
Mit den Additionstheoremen zeigt sich, dass diese Funktion gleich $x \mapsto -\cos(2x)$ ist.

Frage 15

Welche Periode hat die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$?

- ◯ Es liegt keine Periode vor.
- ◯ $\frac{\pi}{2}$
- ◯ 2
- √ ◯ π
- ◯ π^2

Eine Funktion f hat genau dann Periode $p > 0$, wenn für alle x gilt:

$$f(x) = f(x + p).$$

Für die Sinus-Funktion ist 2π die kleinste positive Zahl mit

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi), \text{ für alle } x.$$

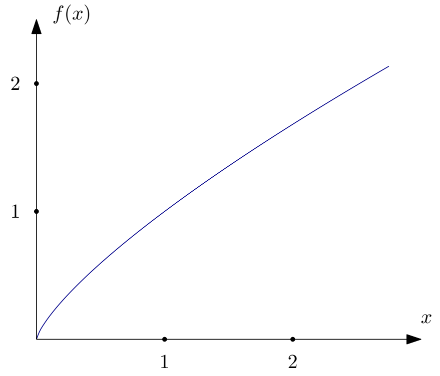
In der Aufgabe folgt

$$f(x) = \sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)) = f(x + \pi).$$

Die Funktion f mit $f(x) = \sin(2x)$ hat die Periode π.

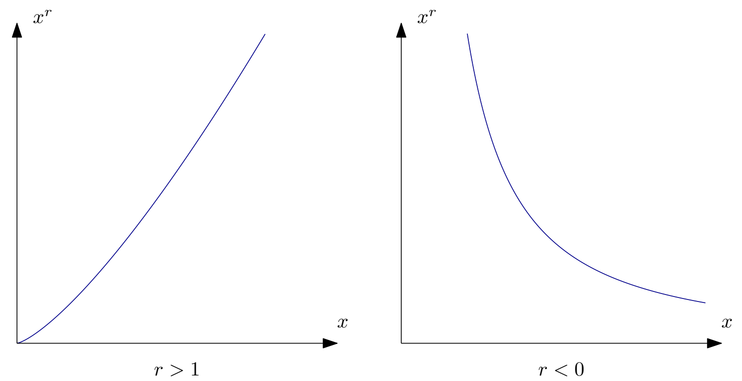
Frage 16

Welche Funktion $x \mapsto f(x)$ passt zur folgenden Kurve?



- ◯ $x \mapsto x^3$
- ◯ $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$
- √ ◯ $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$
- ◯ $x \mapsto x^{-\frac{4}{3}}$
- ◯ $x \mapsto x^{-3}$

Der Graph einer Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ ist von der gegebenen Form, falls für den Exponent gilt $0 < r < 1$. Dies ist hier nur für $\frac{3}{4}$ der Fall. Die beiden anderen Klassen von Graphen für $r > 1$ und $r < 0$ sehen so aus:



Frage 17

Gegeben sei die Ebene E mit $E : x + 2y - z = 4$. Welche der folgenden Ebenen ist parallel zu E aber nicht identisch?

○ $F : 2x + 4y - 2z = 8$

Nein. Die Ebenengleichung F ist äquivalent zu der von E, da die Gleichung nur mit 2 multipliziert wurde. Sie definiert also die gleiche Ebene.

○ $G : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 - s \\ z = 2 + t \end{cases}$

Nein. Der Punkt $(2, 2, 2)$ liegt auf E (da $2 + 4 - 2 = 4$) und G (für $s = t = 0$). Damit sind die beiden Ebenen nicht parallel, es sei denn, sie sind identisch.

Nehmen wir sogar drei Punkte

$s = t = 0$ gibt $(2, 2, 2)$,
$s = 0, t = 1$ gibt $(3, 2, 3)$ und
$s = 1, t = 0$ gibt $(4, 1, 2)$,

sehen wir, dass die beiden Ebenen tatsächlich identisch sind. Alle drei Punkte erfüllen auch die Gleichung von E, und weil G ebenfalls eine Ebene definiert, muss es die gleiche sein.

○ $H : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 + s \\ z = 2 + t \end{cases}$

Nein. Die Normale der Ebene H erhalten wir als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Normale der Ebene E gebildet aus den Koeffizienten der Ebenengleichung ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Normalenvektoren sind nicht parallel, denn sie unterscheiden sich nicht um ein skalares Vielfaches. Damit sind auch die beide Ebenen nicht parallel.

√ ○ $L : \begin{cases} x = 2 + 4s - t \\ y = -2s \\ z = -t \end{cases}$

Richtig. Für L ist die Normale gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \text{ Normalenvektor von } E$$

Die Normale von L ist also ein Vielfaches des Normalenvektors von E, und somit sind die Ebenen parallel.

Setzen wir nun einen Punkt von L, z.B. $(2, 0, 0)$ in die Ebenengleichung von E ein, so sehen wir, dass die Gleichung nicht erfüllt ist.

Damit sind die Ebenen L und E zwar parallel aber nicht identisch.

Frage 18

Welchen geometrischen Ort beschreibt die Gleichung $x^2 + 6x + y^2 - 7 = 0$?

- ○ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius $r = 4$
- √ ○ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 4$
- ○ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 16$
- ○ Einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius $r = \sqrt{7}$
- ○ Eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel bei $(-3, 16)$

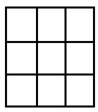
Wir ergänzen die Gleichung $x^2 + 6x + y^2 - 7 = 0$ zu

$$x^2 + 6x + (\mathbf{9} - \mathbf{9}) + y^2 - 7 = 0 \Longrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 16 = 4^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 4$.

Frage 19

Sara malt die 9 Felder einer Zeichnung mit Farbstiften an. Sie besitzt Stifte in 12 unterschiedlichen Farben. Sara malt genau 3 Felder gelb an und die weiteren Felder jeweils mit einer beliebigen der anderen Farben.



Wie viele Möglichkeiten hat sie dafür?

- ○ $\binom{9}{3}$
- ○ 11^6
- √ ○ $\binom{9}{3} \cdot 11^6$
- ○ $9!$
- ○ $12^9 - 3$

Für die 3 gelben Felder hat Sara $\binom{9}{3}$ Möglichkeiten. Für die weiteren 6 Felder in den anderen 11 Farben hat sie 11^6 Möglichkeiten, also insgesamt $\binom{9}{3} \cdot 11^6$.

Frage 20

Eine Urne enthält rote und weisse Kugeln, insgesamt befinden sich 40 Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Herausgreifen von 2 Kugeln 2 weisse zu ziehen, ist $\frac{9}{20}$.

Wie viele weisse Kugeln befinden sich in der Urne?

◯ Das lässt sich nicht entscheiden.

◯ 13

◯ 18

◯ 26

√ ◯ 27

Sei w die Anzahl der weissen Kugeln in der Urne. Dann gilt

$$\frac{w}{40} \cdot \frac{w-1}{39} = \frac{9}{20}.$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung

$$w^2 - w = 26 \cdot 27 \iff w^2 - w - 26 \cdot 27 = 0 \iff (w-27)(w+26) = 0,$$

mit Lösungen $w = 27$ oder $w = -26$. Also muss die Anzahl der weissen Kugeln w die positive Lösung 27 sein.

Frage 21

Eva und Adam werfen Münzen: Eva bezahlt Adam einen Einsatz von x Franken, dann werden zwei Münzen geworfen. Es gelten folgende Regeln:

- Kommt zweimal Kopf, erhält Eva nichts.
- Kommt zweimal Zahl, erhält Eva ihren Einsatz zurück.
- Zeigt eine Münze Kopf, die andere Zahl, erhält Eva ihren Einsatz plus einen Franken zurück.

Bei welchem Einsatz x ist das Spiel fair, das heisst, weder Adam noch Eva verdienen auf lange Sicht?

○ Das Spiel ist nie fair.

○ $x = 1$

√ ○ $x = 2$

○ $x = 3$

○ Bei jedem Einsatz x.

○ Das lässt sich nicht entscheiden.

Die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse sind:

- Zweimal Kopf $= \frac{1}{4}$
- Zweimal Zahl $= \frac{1}{4}$
- Einmal Kopf, einmal Zahl $= \frac{1}{2}$.

Als Erwartungswert eines Gewinns erhalten wir somit: $0 \cdot \frac{1}{4} + x \cdot \frac{1}{4} + (x+1) \cdot \frac{1}{2}$. Dies soll gleich gleich dem Einsatz x sein:

$$0 \cdot \frac{1}{4} + x \cdot \frac{1}{4} + (x+1) \cdot \frac{1}{2} = x \Longrightarrow x = 2.$$

Frage 22

Wir nehmen an, dass ein neugeborenes Baby mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Knabe (K) und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Mädchen (M) ist. Welche Folge der Geschlechter bei sechs aufeinanderfolgenden Geburten ist am wahrscheinlichsten?

○ $KKMMMK$

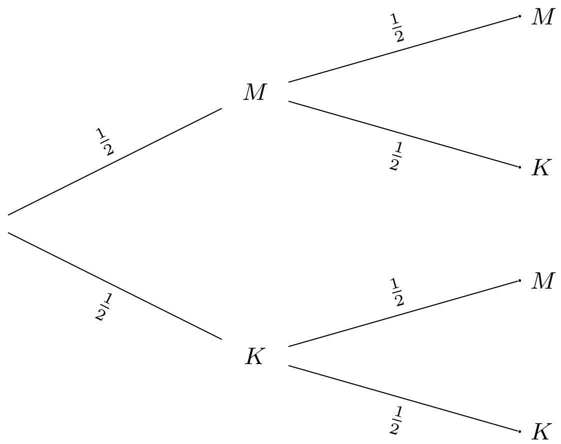
○ $KKKMMM$

○ $KKKKKK$

○ $KMKMKM$

√ ○ Alle sind gleich wahrscheinlich.

Wir haben jeweils eine geordnete Folge der Länge 6 von Ereignissen mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Der zugehörige Baum fängt so an:



Erweitern wir diesen Baum bis zur Länge 6, sehen wir also, dass in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ist.

Frage 23

Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{10n^3+n+21}$$

ist gleich ...

- ◯ $-\frac{1}{21}$.
- ◯ 0.
- ◯ $\frac{1}{32}$.
- √ ◯ $\frac{1}{5}$.
- ◯ ∞.

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{10n^3+n+21} \underbrace{=}_{\substack{\text{Zähler und Nenner} \\ \text{dividiert durch } n^3}} \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^3}}{10+\frac{1}{n^2}+\frac{21}{n^3}}.$$

Da die Summanden $\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2}, \frac{21}{n^3}$ jeweils eine Nullfolge bilden, wird der Grenzwert des Quotienten nach den Rechenregeln für Grenzwerte zu $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Frage 24

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ \ldots$$

ist gleich ...

- ◯ $\frac{5}{8}$.
- √ ◯ $\frac{2}{3}$.
- ◯ $\frac{11}{16}$.
- ◯ $\frac{3}{2}$.
- ◯ ∞.

Die gegebene Summe definiert eine geometrische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Da $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

Frage 25

Der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$$

ist gleich ...

- ◯ 0.
- √ ◯ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- ◯ $\frac{1}{2}$.
- ◯ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ◯ ∞.

Erweitern des Zählers und Nenners mit $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ ergibt:

$$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{(2+h) - 2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}.$$

Damit erhalten wir für den Grenzwert

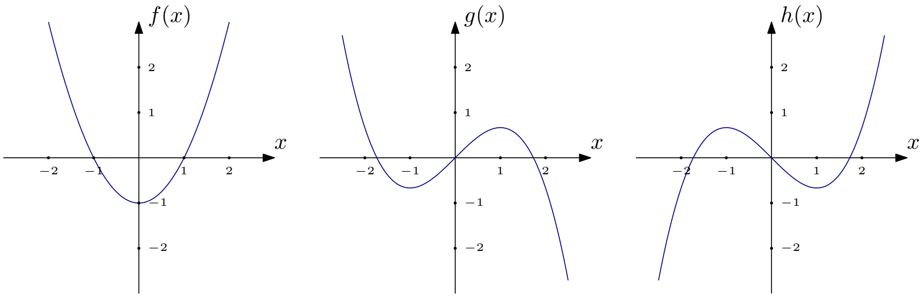
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ein anderes Argument lautet: Der Grenzwert ist der Differentialquotient der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle 2, und es gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, und damit

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Frage 26

Das folgende Bild zeigt die Graphen dreier Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist. Welche Aussage ist richtig?



○ $f' = g$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von f bei $x = -2$ negativ, aber $g(-2) > 0$.

○ $f' = h$

Falsch. Z.B. wechselt die Ableitung von f zwischen -2 und -1 das Vorzeichen nicht, da die Steigung dort immer negativ ist. Aber es ist $h(-2) < 0$ und $h(-1) > 0$.

○ $g' = f$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von g bei $x = -2$ negativ, aber $f(-2) > 0$.

○ $g' = h$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von g im Nullpunkt positiv, aber $h(0) = 0$.

√ ○ $h' = f$

Richtig!

○ $h' = g$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von h im Nullpunkt negativ, aber $g(0) = 0$.

Frage 27

Sei f die Funktion mit $f(x) = e^{2x}$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung f'?

- ○ $f'(x) = 2xe^{2x-1}$
- ○ $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
- √ ○ $f'(x) = 2e^{2x}$
- ○ $f'(x) = e^{2x}$
- ○ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt:

$$f'(x) = \left(e^{2x}\right)' \underbrace{=}_{\text{Kettenregel}} (2x)'(e^{2x}) = 2e^{2x}.$$

Frage 28

Sei $f(x) = \ln(\sin x)$ mit $x \in \,]0, \pi[$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- ○ $f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- √ ○ $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- ○ $f'(x) = \ln(\cos(x))$
- ○ $f'(x) = \frac{1}{x}\sin(x) + \ln(\cos x)$
- ○ $f'(x) = \cos(x)\ln(\sin x)$

Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = \left(\ln(\sin(x))\right)' = (\sin(x))'\frac{1}{\sin(x)} = \cos(x)\frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Frage 29

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = -\cos(3x)$. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f in $\frac{\pi}{2}$.

√ ◯ -3

◯ 1

◯ $3\sin(3)$

◯ 3

◯ Die Tangente existiert nicht.

Die Steigung der Tangente a_t an den Graphen einer Funktion f in einem Punkt x_0 ist gleich dem Wert der Ableitungsfunktion f' in x_0, das heisst, $a_t = f'(x_0)$. Hier ist $f(x) = -\cos(3x)$ und $f'(x) = 3\sin(3x)$, und damit die Steigung gleich

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 3\sin(3\frac{\pi}{2}) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

Frage 30

Wir definieren zwei neue Funktionen Sinushyperbolicus $\sinh x$ und Kosinushyperbolicus $\cosh x$ wie folgt:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Die Ableitung von Kosinushyperbolicus, $\frac{d}{dx}\cosh x$, ist ...

√ ◯ $\sinh x$.

◯ $\cosh x$.

◯ $-\sinh x$.

◯ $-\cosh x$.

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \sinh x$$

Frage 31

Welche der folgenden Gleichungen ist für reellen Zahlen x richtig?

- ◯ $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$
- ◯ $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$
- √ ◯ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- ◯ $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 0$

Setzen wir die Definitionen $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ jeweils in die Gleichung ein und multiplizieren aus, sehen wir, dass nur $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ gilt.

Frage 32

Das Integral $\int_0^2 3x^2\,dx$ ist gleich ...

- ◯ $\frac{4}{3}$.
- ◯ 2.
- ◯ $\frac{8}{3}$.
- ◯ 4.
- √ ◯ 8.

Das Integral berechnet sich durch

$$\int_0^2 3x^2\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8 - 0 = 8.$$

Frage 33

Das Integral $\int_0^1 e^{-2t}\,dt$ ist gleich ...

- ◯ $1 - \frac{1}{e^2}$.
- ◯ $\frac{1}{2e^2}$.
- ◯ $\frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}$.
- ◯ $1 - \frac{1}{2e^2}$.
- √ ◯ $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$

Das Integral berechnet sich durch

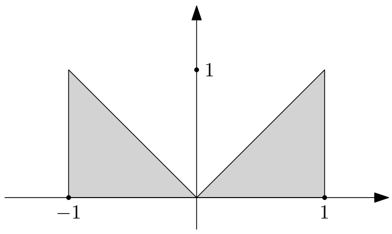
$$\int_0^1 e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - (-\frac{1}{2}\cdot 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}.$$

Frage 34

Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\,dt$ ist gleich ...

- ◯ 0.
- √ ◯ 1.
- ◯ 2.
- ◯ 4.
- ◯ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\,dt$ ist der Inhalt der Fläche, welche der Funktionsgraph mit der x-Achse einschliesst. Also:



Die beiden Dreiecke bilden zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, welches den Flächeninhalt 1 hat. Mithin gilt $\int_{-1}^{1} |t|\,dt = 1$.

Alternativ können wir aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Betragsfunktion auch rechnen:

$$\int_{-1}^{1} |t|\,dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} t\,dt = 2\left(\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1\right) = 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 1.$$

Frage 35

Sei f die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)\,dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

- ◯ $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$
- ◯ $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$
- ◯ $f'(x) = \cos(x)$
- √ ◯ $f'(x) = \sin(x)$
- ◯ Keine der Gleichungen ist korrekt.

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.
Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)\,dt = -\cos t\Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

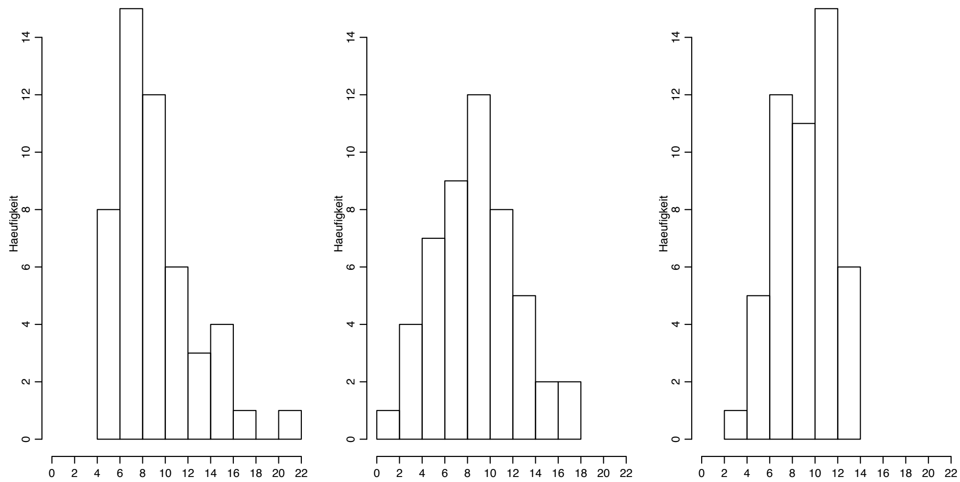
Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.

Frage 36

Für drei Datensätze wurden der Mittelwert, der Median und die Standardabweichung berechnet. Es ergaben sich die folgenden Werte

	Datensatz 1	Datensatz 2	Datensatz 3
Mittelwert	8.77	9.05	9.13
Median	8.76	8.18	9.23
Standardabweichung	3.80	3.44	2.56

Ferner sind die Histogramme der 3 Datensätze gegeben.



Welches ist die richtige Zuordnung der 3 Histogramme links, Mitte und rechts zu den Datensätzen ?

○ 1 – links, 2 – Mitte, 3 – rechts

○ 1 – links, 3 – Mitte, 2 – rechts

√ ○ 2 – links, 1 – Mitte, 3 – rechts

○ 3 – links, 2 – Mitte, 1 – rechts

○ 2 – links, 3 – Mitte, 1 – rechts

○ 3 – links, 1 – Mitte, 2 – rechts

Im Histogramm rechts ist die Streuung am kleinsten, also gehört das zu Datensatz 3, bei dem die Standardabweichung am kleinsten ist.
Das Histogramm in der Mitte ist genähert symmetrisch, während das links asymmetrisch ist: Abweichungen nach oben vom Median sind dort grösser als Abweichungen nach unten, was zu einem grösseren Mittelwert führt. Daher gehört das Histogramm links zu Datensatz 2, und das in der Mitte demnach zu Datensatz 1.

III. Literaturempfehlungen

Eventuell sind Sie aufgrund der Auswertung Ihres Selbsteinschätzungstests zum Schluss gekommen, dass Sie sich auf Ihr geplantes ETH-Studium noch weiter vorbereiten möchten. Dabei kann es darum gehen, gezielt Lücken im Mathematikstoff zu schliessen, oder den Mathematik-Maturastoff generell noch einmal aufzufrischen. Die folgenden Hinweise können Ihnen helfen, sich für ein Buch zu entscheiden, das auf Ihre Bedürfnisse zugeschnitten ist.

Mathematik zum Studienbeginn: Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge
Arnfried Kemnitz
Vieweg+Teubner, 423 Seiten
Das Buch repetiert den gesamten Maturastoff der Mathematik und ist vom Stil und Inhalt her gut auf die Einführungsvorlesungen an der ETH zugeschnitten. Der Stoff wird anhand von zahlreichen Beispielen illustriert, jedoch werden keine Übungsaufgaben angeboten.

Brückenkurs Mathematik: für Studieneinsteiger aller Disziplinen
Guido Walz, Frank Zeilfelder,Thomas Rießinger
Spektrum Akademischer Verlag, 375 Seiten plus 15 Seiten Formelsammlung
Das Buch deckt den üblichen Maturastoff in Mathematik ab und erklärt die Theorie sehr ausgiebig. Man findet zudem hier genügend Beispiele und einige Übungsaufgaben mit kurzen Lösungen.

Starthilfe Mathematik: Für Studienanfänger der Ingenieur-, Natur- und Wirtschaftswissenschaften
Winfried Schirotzek, Siegfried Scholz
Vieweg+Teubner, 139 Seiten
Dieses Buch ist sehr kompakt und deckt den Maturastoff mit Ausnahme der Stochastik ab. Die Theorie wird kurz erklärt und mit Beispielen und Bildern unterlegt. Allerdings gibt es keine Übungsaufgaben zum Stoff.

Die folgenden beiden Bücher haben einen etwas anderen Charakter, sind aber auch durchaus lohnenswert:

Grundwissen Mathematik: Ein Vorkurs für Fachhochschule und Universität
Jan van de Craats, Rob Bosch
Springer, 324 Seiten
In diesem Buch steht weniger die Theorie, die in allen Abschnitten nur kurz beleuchtet wird, im Vordergrund, als das Üben. Man findet zahlreiche (zum Teil repetitive) Aufgaben sowie deren Ergebnisse (jedoch ohne Lösungsweg). Die Stochastik fehlt.

Brückenkurs Mathematik: Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben
Karl Bosch
Oldenbourg, 272 Seiten
In diesem Buch wird der Maturastoff mit Ausnahme der Vektorgeometrie und der Stochastik abgedeckt, allerdings auf recht elementarem Niveau. Die Theorie

wird kurz dargelegt und mit Beispielen veranschaulicht. Bei den zahlreichen Übungsaufgaben sind die Ergebnisse jeweils mit kurzem Lösungsweg angegeben.

Wer sich für ein Mathematik- oder ein Physikstudium interessiert, findet vielleicht eines der folgenden Bücher hilfreich:

Vorkurs Mathematik: Ein kompakter Leitfaden
Joachim Erven, Matthias Erven, Josef Hörwick
Oldenbourg Verlag, 252 Seiten
Das Buch bietet eine gute Auswahl an Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Die Darstellung ist eher abstrakt, aber korrekt und verständlich. Der Stoff wird mit guten Graphiken illustriert, jedoch nur mit wenigen Beispielen unterlegt. Bis auf die Stochastik werden alle wesentlichen Teile des gymnasialen Mathematikstoffs abgedeckt.

Mathematik für Einsteiger: Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn
Klaus Fritzsche
Spektrum Akademischer Verlag, 400 Seiten
Dieses Buch ist für Mathematikstudentinnen und -studenten gedacht. Es dient nicht nur zur Vorbereitung, sondern auch als Begleitbuch während des ersten Studienjahrs. Der Text erklärt grundlegende abstrakte mathematische Begriffe auf verständliche Weise. Die Stochastik wird nicht behandelt.

Survival-Kit Mathematik: Mathe-Basics zum Studienbeginn
Albrecht Beutelspacher
Vieweg+Teubner, 237 Seiten
Dieses Buch ist gedacht als Studienbegleitmaterial für ein Mathematikstudium. Es führt sehr konzis wichtige Begriffe ein und bietet direkt darauf abgesimmt zu jedem Begriff eine Handvoll Übungsaufgaben. Die Stochastik ist ausgeklammert.